

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Total	Nota

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 100 minutos.

- 1) [15 ptos.] Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- a) [7 ptos.] Determine si f es continua en $(0, 0)$.
- b) [8 ptos.] Determine si f es diferenciable en $(0, 0)$. (**Ayuda:** $f_y(0, 0) = 0$).

- 2) [15 ptos.] Sea $f(x, y)$ una función diferenciable tal que

$$f(0, 1) = -1, \quad f_x(0, 1) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad f_y(0, 1) = -1$$

Para $h(t) = t^2 \cdot f(1 - t^2, e^{2t-2})$, calcular $\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=1}$.

- 3) [10 ptos.] Sean $f(x, y) = e^{ax}y^2 + 2xy$, con $a \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (1, -1)$. Determine el(los) valor(es) de $a \in \mathbb{R}$ de tal modo que $D_{\vec{u}}f(0, 1) = \sqrt{8}$.

- 4) [20 ptos.] Sea $f(x, y) = 2x^2y - 2y + 1$ la temperatura en el punto (x, y) de la placa elíptica $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$. Queremos localizar los puntos sobre la placa donde la temperatura es máxima y la temperatura es mínima. Para esto, se pide:

- a) [5 ptos.] Encontrar los puntos críticos de f en el interior de la placa.
- b) [10 ptos.] Encontrar los posibles puntos extremos en el borde de la placa (Multiplicadores de Lagrange).
- c) [5 ptos.] Concluya cuáles son los puntos de máxima y mínima temperatura.

PAUTA

1) a) Notemos que

$$\left| \frac{y(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + y^4}} - 0 \right| \leq \frac{|y|(x^2 + y^2)}{\sqrt{y^2}} = \frac{|y|(x^2 + y^2)}{|y|} = x^2 + y^2 \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

Luego, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, es decir f es continua en $(0, 0)$

b) Note primero que

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Además, de la ayuda sabemos que $f_y(0, 0) = 0$. Luego, debemos estudiar el límite

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - (f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0))}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x^2 + y^2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + y^4})\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Este último límite es 0, pues

$$\left| \frac{y(x^2 + y^2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + y^4})\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{|y|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + \underbrace{y^4}_{\geq 0}\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|y|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

de esto concluimos que f es diferenciable en $(0, 0)$.

2) Supongamos que $x = 1 - t^2$ e $y = e^{2t-2}$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= 2t \cdot f(x, y) + t^2 \left(f_x(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} + f_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dt} \right) \\ &= 2t \cdot f(x, y) + t^2(f_x(x, y) \cdot (-2t) + f_y(x, y) \cdot (2e^{2t-2})) \end{aligned}$$

Luego

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=1} = 2 \cdot f(0, 1) + f_x(0, 1) \cdot (-2) + f_y(0, 1) \cdot (2) = 2 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-2) + (-1) \cdot (2) = -5$$

3) Notemos que f es diferenciable en $(0, 1)$, luego $D_u f(0, 1) = \nabla f(0, 1) \cdot \frac{u}{\|u\|}$. Tenemos que

$$f_x(x, y) = ae^{ax}y^2 + 2y \quad y \quad f_y(x, y) = 2e^{ax}y + 2x$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_u f(0, 1) &= \sqrt{8} \\ (f_x(0, 1), f_y(0, 1)) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= \sqrt{8} \\ (a + 2, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= \sqrt{8} \\ \frac{a + 2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} &= \sqrt{8} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

es decir, $a = 4$

4) a) Resolviendo el sistema

$$\left. \begin{array}{lcl} f_x(x, y) & = & 4xy = 0 \\ f_y(x, y) & = & 2x^2 - 2 = 0 \end{array} \right|$$

Tenemos que los puntos críticos son: $P_1 = (1, 0)$ y $P_2 = (-1, 0)$

b) El sistema de Lagrange nos queda

$$\left. \begin{array}{lcl} 1) & 4xy & = \lambda \cdot \frac{x}{2} \\ 2) & 2x^2 - 2 & = \lambda \cdot 2y \\ 3) & \frac{x^2}{4} + y^2 & = 1 \end{array} \right|$$

De 1) tenemos que $x \left(4y - \frac{\lambda}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $\lambda = 8y$. Estudiaremos los casos respectivos.

■ Supongamos que $x = 0$. Luego

$$\left. \begin{array}{lcl} 2) & -1 & = \lambda y \\ 3) & y^2 & = 1 \end{array} \right|$$

lo cual implica que $y = 1$ y $\lambda = -1$ o $y = -1$ y $\lambda = 1$. Dos postulantes a extremos en el borde (o frontera) son los puntos $P_3 = (0, 1)$ y $P_4 = (0, -1)$

■ Ahora, supongamos que $\lambda = 8y$. Luego

$$\left. \begin{array}{lcl} 2) & x^2 & = 8y^2 + 1 \\ 3) & \frac{x^2}{4} + y^2 & = 1 \end{array} \right|$$

Reemplazando 2) en 3) nos queda la ecuación $\frac{8y^2 + 1}{4} + y^2 = 1$ la cual tiene soluciones $y = \pm \frac{1}{2}$.

Si $y = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Análogamente, si $y = -\frac{1}{2}$, entonces $x = \pm\sqrt{3}$.

Así tenemos cuatro puntos más como postulantes a extremos en el borde: $P_5 = (\sqrt{3}, 1/2)$ y $P_6 = (-\sqrt{3}, 1/2)$, $P_7 = (\sqrt{3}, -1/2)$ y $P_8 = (-\sqrt{3}, -1/2)$

c) Finalmente, notemos que

$$\begin{array}{lcl} f(P_1) & = & 1 \\ f(P_2) & = & 1 \\ f(P_3) & = & -1 \\ f(P_4) & = & 3 \\ f(P_5) & = & 3 \\ f(P_6) & = & 3 \\ f(P_7) & = & -1 \\ f(P_8) & = & -1 \end{array}$$

de lo cual tenemos que los puntos donde se alcanza la mínima son P_3 , P_7 y P_8 , y la máxima se alcanza en los puntos P_4 , P_5 y P_6